الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني لامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2009

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

1) أ- أنشر العبارة $(x+1)(5x^2+6)$ ثمّ أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أنّ $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب- احسب x و y إذا علمت أنّ x عدد أوّلي أصغر من 12 ، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2) أ- عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

تمرين 2: (5 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء وَ 6 حمراء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).

احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

تمرين 3: (5 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتين $A\left(2,1,2\right)$ و $B\left(0,2,-1\right)$ والمستقيم $\left(D\right)$ ذو التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{حيث } t\in\mathbb{R}$$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$.

أثبت أنّ $\left(D\right)$ و $\left(AB\right)$ لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2) نعتبر المستوي $\left(P\right)$ الذي يشمل المستقيم $\left(AB\right)$ ويوازي المستقيم $\left(D\right)$.

أ - بيّن أنّ الشّعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي $\left(P\right)$.

ب - اكتب معادلة للمستوي $\left(P\right)$.

ج - بيّن أنّ المسافة بين نقطة M من $\left(D\right)$ والمستوي $\left(P\right)$ مستقلة عن موضع M .

د - عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي $\left(P\right)$ مع المستوي $\left(yoz\right)$.

تمرين 4: (6 نقاط)

1) نعرّف الدّالة العددية f على المجال $[1,5]$ بالعبارة: $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

ليكن $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

الوحدة على المحورين $3cm$.

أ- ادرس تغيرات الدّالة f

ب- أنشئ المنحنى البياني $\left(C\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية $\left(U_n\right)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $U_0=5$ و بالعبارة:

$$U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{5}{U_n}\right)$$

أ - أحسب U_1 ، U_2

ب- استعمل المنحني $\left(C\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$ لتمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 على محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n\geqslant\sqrt{5}$.

ب- بيّن أنّ المتتالية $\left(U_n\right)$ متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب $\left(U_n\right)$؟

4) أ- برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ: $\left(U_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{5}\right)$

ب- استنتج أنّ $\left(U_n-\sqrt{5}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(U_0-\sqrt{5}\right)$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ؟

الموضوع الثاني

تمرين 1: (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركّب z يختلف عن 1 العدد المركّب $f(z)$ حيث: $f(z)=\dfrac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

2) لتكن M صورة العدد المركّب z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

أ- عين مجموعة النّقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقيا سالباً تماما.

ب- احسب العدد المركّب z_0 بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $arg(f(z_0))=\dfrac{3\pi}{2}$.

3) في المستوي المركّب نعتبر النّقط A ،B و C صور الأعداد المركّبة 1 ، i و z_0 على الترتيب.

أ- ما نوع المثلّث ABC ؟

ب- عين النّقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) و استنتج طبيعة الرّباعي $ACBD$.

تمرين 2: (5 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $U_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}=3U_n+2n+1$.

(V_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي : $V_n=U_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيا

1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأوّل .

2) احسب كلاّ من V_n و U_n بدلالة n.

3) احسب المجموعين S و S' حيث: $S=V_0+V_1+V_2+...+V_n$ و $S'=U_0+U_1+U_2+...+U_n$.

4) أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها U_n مضاعفا للعدد 5 .

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستويين (P_1)و (P_2)حيث

$x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2).

1) اكتب معادلة للمستوي (P_2).

2) عيّن شعاعاً ناظميا $\vec{n}_1$ للمستوي (P_1) وشعاعاً ناظميا $\vec{n}_2$ للمستوي (P_2).

3) بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

4) أ- $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء، عين المسافة d_1 بين النّقطة A والمستوي (P_1) ثمّ المسافة d_2 بين A و (P_2).

ب- استنتج المسافة d_3 بين النّقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

5) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث λ عدد حقيقي.

ب- M نقطة كيفية من (Δ) ، احسب MA^2 بدلالة λ مستنتجاً ثانية المسافة بين A و (Δ) .

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدّالة f .

2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D).

3) أ- بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1{,}3<x_0<1{,}4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التّراتيب.

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) أوجد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x .

5) g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$.

الإجابة النموذجية لموضوع مقترح لامتحان :.البكالوريا.. دورة : 2009 .
اختبار مادة : الرياضيات الشعبة: الرياضيات . المدة : 04سا و30د

الموضوع الأول

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td rowspan="8">التعداد
القواسم والمضاعفات</td><td>تمرين 1: (4 نقاط)</td><td></td><td rowspan="8">4</td></tr>
<tr><td>1. أ- نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>العلاقة بين x و y هي: $x=2y+1$ ....</td><td>0.5+0.25</td></tr>
<tr><td>ب- $(x,y)=(7,3)$ أو $(x,y)=(11,5)$ ....</td><td>0.25×2</td></tr>
<tr><td>من أجل $(x,y)=(7,3)$ لدينا $A=2008$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>من أجل $(x,y)=(11,5)$ لدينا $A=7332$ ....</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>2. أ- القواسم المطلوبة هي 1 و 2 . ...</td><td>0.5×2</td></tr>
<tr><td>ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b : $(a,b)=(11,5)$ ....</td><td>0.5×2</td></tr>
<tr><td rowspan="6">ساب الاحتمال،
تغير العشوائي،
الأمل الرياضي</td><td>تمرين 2: (5 نقاط)</td><td></td><td rowspan="6">5</td></tr>
<tr><td>1-أ) $P=\frac{1}{30}$ ....</td><td>01</td></tr>
<tr><td>ب) $P'=1-P=\frac{29}{30}$ ....</td><td>01</td></tr>
<tr><td>2)
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>P_i</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{1}{30}$</td></tr>
</table>
..........</td><td>0.25×5</td></tr>
<tr><td>$E(X)=\frac{6}{5}$ ....</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>3) $P(Y=2)=C_5^2\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3\simeq 0.01$ ....</td><td>1</td></tr>
</table>

140

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
هندسة فضائية	**تمرين 3:** (5 نقاط)		05
	1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .... $\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-3\lambda \end{cases}$	0.75	
	* إثبات أن (D) والمستقيم (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي		
	لدينا $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $(3,-1,2)$ $\overrightarrow{V_D}$ والمستقيمان غير متقاطعين	0.5 + 0.25	
	2) أ- لإثبات أنّ الشعاع $\vec{n}$ عمودي على المستوي (P) يكفي إثبات أنه عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{V_D}$ باعتبارهما شعاعي توجيه للمستوي (P)	0.5 + 0.5	
	ب- المستوي (P) يشمل النقطة A وعمودي على $\vec{n}$ .... منه معادلته هي $(P): x+5y+z-9=0$	0.5	
	ج - المسافة بين M و (P) هي $d(M,(p))=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ - هي مستقلة عن موضع M	0.25 + 0.75	
	د - معادلة (yoz) - التمثيل وسيطي لمستقيم تقاطع (P) مع (yoz) .... $\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=9-5\alpha \end{cases}$	0.75 + 0.25	
دوال عددية	**تمرين 4:** (6 نقاط)		06
	1) أ - دراسة التغيرات		
	- $f'(x)=\frac{x^2-5}{2x^2}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغيّر -	0.25+ 0.5	
	جدول التغيرات (انظر الجدول أدناه)	0.25	
	ب - إنشاء المنحني (C) و المستقيم (Δ)	0.25+ 0.5	
	2) أ - حساب U_1 و U_2	0.25	
	ب - تمثيل الحدود U_0، U_1، U_2	0.75	
	3) أ - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geqslant \sqrt{5}$	0.75	
	ب - إثبات أنّ المتتالية متناقصة تماما و استنتاج أنّها متقاربة	0.25+ 0.75	
	4) أ - إثبات صحّة $\left(U_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{5}\right)$	0.5	
	ب - استنتاج أنّ : $\left(U_n-\sqrt{5}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(U_0-\sqrt{5}\right)$	0.75	
	$\lim_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{5}$	0.25	

جدول التغيرات

x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	↘	$\sqrt{5}$	↗	3

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	الموضوع الثاني		
الأعداد المركبة و الهندسة	**التمرين الأول :04 ن**		4
	1) المعادلة تكافئ: $z^2+10z+34=0$	0.5	
	$\Delta'=-9=(3i)^2$; $z_1=-5-3i$; $z_2=-5+3i$	0.25×4	
	2) أ - مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقيا سالباً تماما هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]AB[$ حيث $A(0,1)$; $B(1,0)$	1	
	ب- من المعطيات ينتج $f(z_0)=-i$ ومنه نجد $z_0=1+i$	0.25×2	
	3) أـ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين	0.5	
	ب- $D(0,0)$ والرباعي $ACBD$ مربع	0.25×2	
المتتاليات و الموافقات	**التمرين الثاني 05 ن**		5
	1- $\alpha=\beta=1$ ، الأساس: $q=3$ ، الحد الأول : $V_0=1$..................	0.25×2+0.75	
	2- $V_n=3^n$; $U_n=3^n-n-1$	0.25×2	
	3- $S=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$; $S'=\frac{1}{2}\left[3^{n+1}-(n+1)(n+2)-1\right]$	0.75+0.5	
	4-أ بواقي القسمة الإقليدية متتالية دورية دورها 4 والبواقي هي :1 ،3،4،2 ..	1	
	ب - $n=20k$; $n=20k+17$; $n=20k+18$; $n=20k+11$ / $k\in\mathbb{N}$	1	
هندسة فضائية	**التمرين الثالث : 04 ن**		4
	1) معادلة (P_2) ; $x-y-z+5=0$	0.5	
	2) $\overrightarrow{n_1}(1,2,-1)$; $\overrightarrow{n_2}(1,-1,-1)$	0.25×2	
	3) $(P_1)\perp(P_2)$	0.25	
	4) أ- $d_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $d_2=2\sqrt{3}$	0.5×2	
	ب- $d_3=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\frac{\sqrt{114}}{3}$	0.5	
	5) أ- $\lambda\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=\lambda-\frac{8}{3}\\ y=\frac{7}{3}\\ z=\lambda\end{cases}$	0.5	
	ب- $MA^2=2(\lambda-\frac{10}{3})^2+\frac{114}{9}$	0.5	
	$d(A,\Delta)=\frac{\sqrt{114}}{3}=d_3$	0.25	

142

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الدوال العددية	**التمرين الرابع : 07 ن**		
	1)-		
	$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	0.25×2	
	- المشتق و إشارته	0.25+0.5	
	- جدول التغيرات	0.5	
	2) أ- $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب	0.25	
	$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته $y = x$	0.5	
	ب- الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D)	0.25	
	3)- أ- (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 (التبرير)............	0.5	
	- حصر x_0	0.75	
	ب- نقطة التقاطع : $A(0,-2)$ ، معادلة المماس $y = 2x - 2$	0.5+0.25	
	جـ - رسم (C_f)	0.5	7
	4) - الدالة الأصلية هي $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4$	0.5	
	5)- تبرير كيفية رسم (C_g) و انطلاقا من (C_f)	0.25×2	
	6)- المناقشة : $m = 0$ للمعادلة حل وحيد موجب $(x = x_0)$ .... $0 < \|m\| < \sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين تماما .... $\|m\| = \sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجبا والآخر معدوما .... $\|m\| > \sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة	0.75	

143